Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Michael Lösch — Sommersemester 2020

Reelle Algebra und Einführung
in die o-Minimalität
Blatt 5
Abgabe: 25.06.2020, 11Uhr

Aufgabe 1 (8 Punkte). In einem reell abgeschlossenen Körper K sei P ein Polynom mit genau m vielen Monomen

$$P(T) = a_1 T^{n_1} + \cdots + a_m T^{n_m} \text{ mit } n_1 < \ldots < n_m.$$

a) Zeige, dass die (echt) positiven Nullstellen von P in K genau den positiven Nullstellen des Polynoms $Q(T) = a_1 + \sum_{i=2}^{m} a_i T^{n_i - n_1}$ entsprechen.

b) Wie viele Monome hat Q'?

c) Wenn die Ableitung eines Polynoms r viele positive Nullstellen besitzt, wie viele positive Nullstellen kann (höchstens) das Polynom selbst besitzen?

d) Schließe daraus induktiv über m, dass P höchstens $m-1$ positive Nullstellen in K besitzen kann.

Insbesondere besitzt das Polynom $T^{10^{10^{10}}} - 30T^3 + 1$ höchstens zwei positive Nullstellen in jedem reell abgeschlossenen Körper.

Aufgabe 2 (8 Punkte).

Sei (A, B) ein Dedekindschnitt des reell abgeschlossenen Körpers K, das heißt, der Körper K ist $A \cup B$ mit $a < b$ für alle a aus A und b aus B, wobei A und B beide nicht-leer sind.

a) Zeige, dass A genau dann kein Supremum in K besitzt, wenn B kein Infimum in K besitzt.

Wir nehmen nun an, dass B kein Minimum (aber möglicherweise ein Infimum) in K besitzt. Ein Polynom Q in $K[T]$ sei *akzeptabel*, falls Q das Nullpolynom ist oder es ein b aus B gibt, welches echt kleiner als alle Nullstellen von Q in B ist und so, dass der Wert $Q(b)$ positiv in K ist.

b) Zeige, dass Q genau dann akzeptabel ist, wenn für alle b in B, welche kleiner als alle Nullstellen von Q in B sind, der Wert $Q(b)$ positiv in K ist.

c) Zeige, dass die Kollektion akzeptabler Polynome die Eigenschaften einer Präordnung erfüllt. Schließe daraus, dass es eine Fortsetzung der Anordnung von K auf $K(T)$ derart gibt, dass ein Polynom genau dann positiv ist, wenn es akzeptabel ist.

d) Beschreibe die Mengen $K \cap (T, \infty)$ und $K \cap (-\infty, T)$ bezüglich der obigen Anordnung auf $K(T)$. Wenn $A = (-\infty, a]$ für ein a aus K, ist uns diese Ordnung auf $K(T)$ bereits bekannt?

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden (Bitte alle Namen eintragen!) Abgabe der Übungsblätter im ILIAS als eine einzige PDF-Datei.